Beweis: o. E. $f'(a) < f'(b)$.

Zu $c \in (f'(a), f'(b))$ finde dann $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = c \quad !$$

Setze $\boxed{g(x) := f(x) - c \cdot x}$, $x \in [a, b] \Longrightarrow$

(*) $g'(a) = f'(a) - c < 0 < f'(b) - c = g'(b)$

(da f auf $[a, b]$ diff'bar)

g stetig auf $[a, b] \Longrightarrow \exists\, x_0 \in [a, b]$ mit

$$g(x) \geq g(x_0) \quad \forall x \in [a, b]$$

(„Minimum")

Fall 1: $x_0 = a \Longrightarrow$

$$\frac{1}{h}\left(g(x_0 + h) - g(x_0)\right) \geq 0 \quad \text{für } h > 0$$

$\Longrightarrow g'(x_0) \geq 0$, Widerspruch zu (*)

<u>Fall 2</u>: $\quad x_0 = b \quad \Longrightarrow$

$$g(x_0 - h) - g(x_0) \geq 0 \quad \text{für } h > 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{-h}\big(g(x_0-h) - g(x_0)\big) \leq 0 \quad \text{-\,\|\,-} \quad \Longrightarrow$$

$g'(x_0) \leq 0$, Wspr. zu ⊛.

Also tritt

<u>Fall 3</u>: $\quad x_0 \in (a,b)$

ein $\underset{11.7}{\Longrightarrow} \quad g'(x_0) = 0 \Longrightarrow f'(x_0) = c.$

□

<u>Anwendung 3</u>: $\boxed{\text{Mittelwertsatz}}$

als <u>das</u> Hilfsmittel, um aus dem Verhalten von f' Aussagen über f abzuleiten.

$\boxed{\text{Satz 11.9}}$: Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

(auf $[a,b]$!)
stetig ✓ und diff'bar auf (a,b). Dann gibt es $x_0 \in (a,b)$ mit

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

$\boxed{\text{Mittelwertsatz}}$
MWS

Im Spezialfall $f(a) = f(b)$ hat f' eine Nullstelle (Satz von Rolle)

Beweis: Sei

$$\boxed{g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}$$

$$\Longrightarrow \; g(a) = f(a) = g(b) \quad (*)$$

Seien $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit

$$g(x_1) = \max_{[a,b]} g, \quad g(x_2) = \min_{[a,b]} g.$$

Fall 1: x_1 und x_2 Randpunkte

$$(*) \Longrightarrow g \equiv f(a) \Longrightarrow g'(x) = 0$$

$$\text{für alle } x \underset{\text{Def. } g}{\Longrightarrow} f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

gilt für jedes x

Fall 2: $x_1 \in (a,b)$ oder $x_2 \in (a,b)$

Sei o. E. $x_1 \in (a,b) \underset{11.7}{\Longrightarrow} g'(x_1) = 0$

$$\Longrightarrow f'(x_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

$\square$

Folgerungen aus dem MWS

I. Monotonieverhalten via Ableitung

Sei $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ diff'bar.

$$\boxed{\begin{array}{l} i)\ f'>0 \text{ auf } (a,b) \Longrightarrow f \text{ streng wachsend} \\ ii)\ f'\geq 0 \quad -\|- \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ wachsend} \end{array}}$$

(analog: $\ldots <, \leq \ldots\ldots$ fallend)

ad i): Seien $x_1<x_2$ aus $(a,b) \overset{MWS}{\Longrightarrow}$

$$\exists x_3\in(x_1,x_2):\ 0<f'(x_3)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Achtung: „$\Longleftarrow$" in i) ist falsch: $x\mapsto x^3$

II. Hinreichende Bdgen für lokale Extrema

Sei $f\in C^2(a,b)$, $x_0\in(a,b)$ und

$$f'(x_0)=0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} i)\ f''(x_0) < 0 \Longrightarrow x_0 \text{ lok. Maximum} \\ ii)\ f''(x_0) > 0 \Longrightarrow x_0 \text{ lok. Minimum} \end{array}}$$

Beweis: i) $f''(x_0) < 0 \overset{\exists \varepsilon > 0:}{\underset{f \in C^2}{\Longrightarrow}}$

$f''(x) < 0$ auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \underset{\text{I.)}}{\Longrightarrow}$

f' streng fallend auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll} f'(x) > f'(x_0) = 0 & \text{auf } (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ f'(x) < f'(x_0) = 0 & \text{auf } (x_0, x_0 + \varepsilon) \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ wächst streng auf } (x_0 - \varepsilon, x_0), \\ f \text{ fällt streng auf } (x_0, x_0 + \varepsilon) \end{array}\right.$$

$\Longrightarrow x_0$ lokales Maximum $\square$

III. Schrankensatz

Wie prüft man ohne großen Aufwand, ob $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(\sin x)$ eine Lipschitz Bdg erfüllt?

$\boxed{\text{Satz 11.10}}$: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig (auf $[a,b]$!) und diff'bar auf (a,b).

Dann gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{\sup_{(a,b)} |f'|}_{\in [0,\infty]} \cdot |x-y|$$

für alle $x, y \in [a,b]$. Ist $\sup\limits_{(a,b)} |f'| < \infty$, so genügt f auf $[a,b]$ einer Lipschitz Bdg.

Beweis: Klar nach MWS; schreibe

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x-y)$$

für $x, y \in [a,b]$ mit Zwischenstelle
z (echt zwischen x und y) $\square$

Im Bspl:

$$f'(x) = \exp(\sin x) \cdot \cos x \Longrightarrow$$

$$\sup_{\mathbb{R}} |f'| \leq e < \infty$$

Bem: Satz 11.10 gilt auch für $\mathbb{C}$-wertige f, dann muss man etwas anders argumentieren (Skript), denn der MWS gilt nicht für $f: [a,b] \to \underline{\underline{\mathbb{C}}}$

IV Eindeutigkeit von Stammfunktionen

Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$.

Man nennt eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion zu f, falls

$$\boxed{F' = f \text{ auf } I}.$$

Ist $G : I \to \mathbb{C}$ eine zweite Stammfkt. zu f, so gilt:

$$\frac{d}{dx}(F - G) \equiv 0$$

Daraus folgt:

$$\exists\, c \in \mathbb{C} : \quad G = F + c$$

(2 Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine Konstante), denn es gilt

$\boxed{\text{Satz 11.11}}$: Sei I ein Intervall und $\varphi : I \to \mathbb{C}$ diff'bar. Dann gilt:

$$\boxed{\varphi \equiv \text{const} \iff \varphi' \equiv 0}$$

Bew: „$\Rightarrow$" klar; „$\Leftarrow$": zeige mit MWS: „Re φ, Im φ sind konstant" $\square$

Folgerung: $\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = f(x) \text{ auf } \mathbb{R}, \\ f(0) = 1 \end{array} \right\}$

wird nur von $x \mapsto e^x$ gelöst.

Bew: Sei f irgendeine Lsg $\Longrightarrow$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x} f(x)\right) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x)$$

$$= 0 \Longrightarrow e^{-x} f(x) \equiv \text{const} \overset{(f(0)=1)}{\Longrightarrow} \text{const} = 1$$

$\square$

V. 2ter MWS, L'Hospitalsche Regeln

Satz 11.12: Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig (auf $[a,b]$!) und diff'bar auf (a,b). Dann existiert $x_0 \in (a,b)$ mit

$$\boxed{g'(x_0)\big(f(b)-f(a)\big) = f'(x_0)\big(g(b)-g(a)\big)}$$

Bem: 1.) alter MWS folgt mit $g(x) := x$.

2.) alter MWS für f und g liefert:

$$\left.\begin{aligned} f(b)-f(a) &= f'(x_1)(b-a), \\ g(b)-g(a) &= g'(x_2)(b-a) \end{aligned}\right\}$$

mit $x_1 \neq x_2$ i.a. Im Fall $g'(x_2) \neq 0$ folgt nur:

$$\underline{\underline{g'(x_2)}}\big(f(b)-f(a)\big) = \underline{\underline{f'(x_1)}}\big(g(b)-g(a)\big)$$

<u>Beweis von 11.12</u> : Sei

$$h(x) := \big(f(b)-f(a)\big)\big(g(x)-g(a)\big) - \big(g(b)-g(a)\big)\big(f(x)-f(a)\big)$$

$\Longrightarrow h(a) = h(b) = 0$

MWS für $h \Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b)$ mit $h'(x_0) = 0$.

$\square$

<u>Anwendung</u>:

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sinh x} = ?$$

<u>Nenner</u> <u>und</u> <u>Zähler</u> gehen gegen 0 !

Sei $f(x) := \sin x \cdot \cos x$, $g(x) := \sinh x$

$$\underset{x>0}{\Longrightarrow} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sinh x} = \frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} \underset{\text{2ter MWS}}{=}$$

$\dfrac{f'(y)}{g'(y)}$ für ein $y \in (0,x)$

Rechnung ist i. O., da $g'(y) = \cosh y \neq 0$

Also: $$\frac{\sin x \cdot \cos x}{\sinh x} = \frac{\cos^2 y - \sin^2 y}{\cosh y};$$

$x \downarrow 0$ bedeutet $y \downarrow 0$, die rechte Seite hat Grenzwert 1.

analog: $\lim\limits_{x \uparrow 0} \ldots\ldots = 1$. Zusammen:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sinh x} = 1}$$

Nach dem Muster des Beispiels beweist man

Regeln von L'H

Satz 11.13: Seien $a < b$ aus $\mathbb{R}$ und $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ diff'bar mit

$\boxed{g'(x) \neq 0}$ auf (a,b). Es gelte

i) $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ bei $x \downarrow a$

odir

ii) $f(x) \to \pm\infty$ und $g(x) \to \pm\infty$ bei $x \downarrow a$.

Existiert dann $\alpha := \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ in $\mathbb{R}$, so auch $\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit Wert α.

Entsprechende Versionen gelten für

- $x \uparrow b$ odir
- $x \to x_0$ für $x_0 \in (a,b)$ odir
- $x \to \pm\infty$.

Bem: 1.) Man hat also Formeln zur Berechnung von $\lim\limits_{\cdots} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$

für den Fall

$$\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{0}{0} \text{ oder } = \frac{\infty}{\infty}$$

unter der Voraussetzung, dass

$$\boxed{\lim \frac{f'}{g'} \text{ existiert}}$$!

2.) L'Hospital ist i.a. $\boxed{\text{falsch}}$, wenn i) oder ii) nicht erfüllt sind:

$$\underbrace{\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x}}_{\text{nicht vom Typ } \frac{0}{0} \text{ oder } \frac{\infty}{\infty}} = 1 \neq 2 = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{d}{dx} x^2}{\frac{d}{dx} x}$$

!!

3.) Ist $\frac{f'}{g'}$ auch unbestimmt, so kann man $\frac{f''}{g''}$ studieren, falls erlaubt.

Beispiele: (immer von rechts nach links lesen!)

① $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cosh x} \overset{(LH)}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin x \cos x}{-\sinh x}$

$\underset{(LH)}{=} -2 \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cosh x} = -2$

Verallgemeinerung von $\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} \to 1$

② $\boxed{\lim\limits_{x \downarrow 0} x^x = ?}$

Es gilt

$x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x \ln x}$;

bestimme also

$\lim\limits_{x \downarrow 0} (x \ln x)$! $\left(\text{"}\underline{0 \cdot (-\infty)}\text{"}\right)$

$\lim\limits_{x \downarrow 0} (x \cdot \ln x) = \underbrace{\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{\ln x}{1/x}}_{\text{"}\frac{-\infty}{\infty}\text{"}} \underset{\underline{\underline{(LH)}}}{=}$

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \downarrow 0} \left(- \frac{x^2}{x} \right) = 0$$

Also: $\lim_{x \downarrow 0} x^x = e^0 = 1$

③ $r > 0$: $\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^r} = ?}$ $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^r} \underset{(LH)}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{r\, x^{r-1}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{r\, x^r} = 0.$$

□

(ln wächst bei $x \to \infty$ schwächer als jede positive x-Potenz)

L'Hospital (Zusammenfassung)

Es gelte: • $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

• $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \\ \text{"}\lim\text{"} = \text{(einseitiger) Limes } x \to x_0 \end{cases}$

• f, g differenzierbar, $\boxed{g'(x) \neq 0}$

• $\begin{cases} \lim f(x) = 0 = \lim g(x) \\ \boxed{\text{oder}} \\ \lim f(x), \lim g(x) \in \{\pm\infty\} \end{cases}$

• $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$

$$\boxed{\text{Dann ist auch } \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.}$$

$\boxed{\text{Bem}}$: 1.) L'Hospital <u>nicht</u> anwendbar auf $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$!

(Zähler und Nenner gehen in jedem Schritt gegen ∞ , Limes ist offensichtlich 1)

2.) einfaches Bspl. für $\alpha = \infty$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} \underset{LH}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} \underset{LH}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

entsprechend: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^k} = \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$

VI. Kriterien für Konvexität

Satz 11.14: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig (auf $[a,b]$) und diff'bar auf (a,b). Dann gilt:

$$\boxed{f \text{ konvex (konkav)} \iff f' \text{ wächst (fällt) monoton auf } (a,b)}$$

Korollar: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und 2 mal diff'bar auf (a,b). Dann gilt:

i) $f'' \geq 0$ auf $(a,b) \iff f$ konvex

ii) $f'' > 0$ auf $(a,b) \implies f$ streng konvex ⟸ "aus dem Satz und"

(analog für „konkav")

Bem: 1.) Nur das Korollar basieren auf dem MWS, da z.B

$$f'' \geq 0 \xRightarrow{\text{MWS}} f' \text{ wächst}$$

2.) $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ streng konvex} \underset{\text{i.a.}}{\not\Longrightarrow} \\ f'' > 0, \end{array} \right.$

<u>z.B.</u>: $f(x) = x^4$ mit $f''(0) = 0$.

$\boxed{\text{Bsple}}$: 1.) $\boxed{f(x) := e^x}$ <u>streng</u> <u>konvex</u>,

denn $f''(x) = e^x > 0$.

2.) $\boxed{f(x) := \ln x}$, $x > 0$, <u>streng</u> <u>konkav</u>,

denn $f''(x) = -1/x^2 < 0$ für $x > 0$.

3.) sin, cos sind auf <u>entsprechenden</u> <u>Teil-</u>
<u>intervallen</u> streng konvex bzw. konkav.

<u>Notation</u>: $\boxed{x_0 \text{ Wendepunkt von } f}$ $:\Longleftrightarrow$

f links von x_0 konkav, rechts davon konvex
(oder umgekehrt)